المحاضرة المتكررة الثامنة

مـــــــــــــــــــــــــــ

سندرس في هذه المحاضرة العناوين الآتية :

1) متى نقول عن المصفوفة أنها صفر لكثير الحدود
2) مبرهنة كيلي هاملتون
3) إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام مبرهنة كيلي هاملتون
4) كثير الحدود الأصغري لمصفوفة مربعة

☼ متى نقول عن المصفوفة المربعة A أنها صفر لكثير الحدود $f(x)$ ؟

تعريف : نقول عن المصفوفة المربعة A أنها صفر لكثير الحدود $f(x)$

إذا كان $f(A) = 0$

↓ المصفوفة الصفرية

مثال 1 ليكن لدينا المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

و لدينا كثير الحدود $f(x) = x^2 - 5x + 9$

نعلم أن

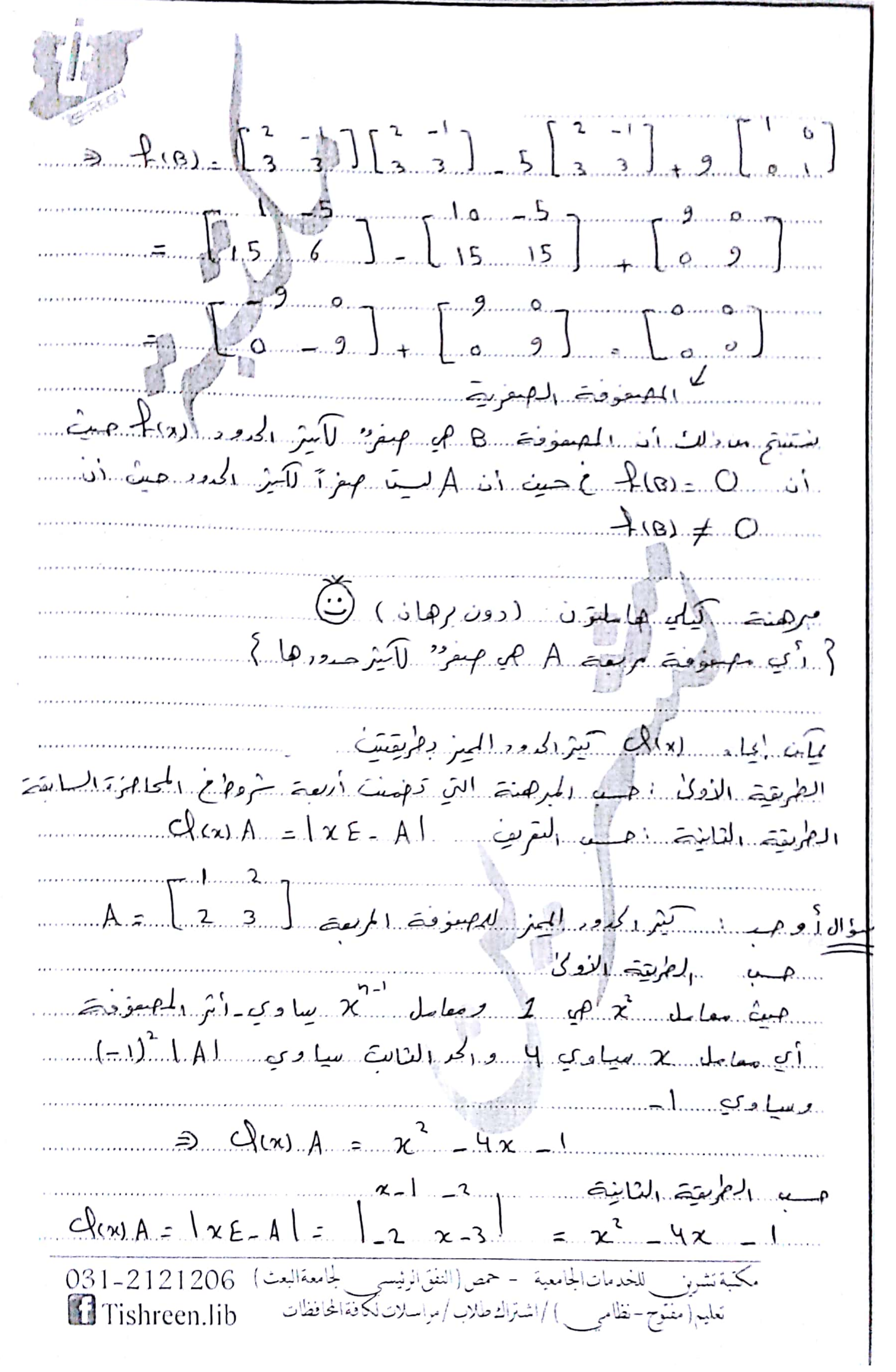
$$f(A) = A^2 - 5A + 9E$$

$$\Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$f(B) = B^2 - 5B + 9E$$



$$\Rightarrow f(B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 15 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية ✓

نستنتج من ذلك أن المصفوفة B هي صفرة لكثير الحدود $f(x)$ حيث أن $f(B) = 0$ في حين أن A ليست صفراً لكثير الحدود حيث أن $f(B) \neq 0$

مبرهنة كيلي هاملتون (دون برهان) ☺

{ أي مصفوفة مربعة A هي صفرة لكثير حدودها }

يمكن إيجاد $cl(x)$ كثير الحدود المميز بطريقتين

الطريقة الأولى: حسب المبرهنة التي تضمنت أربعة شروط في المحاضرة السابقة

الطريقة الثانية: حسب التعريف $cl(x)\,A = |xE - A|$

سؤال أوجد: كثير الحدود المميز للمصفوفة المربعة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

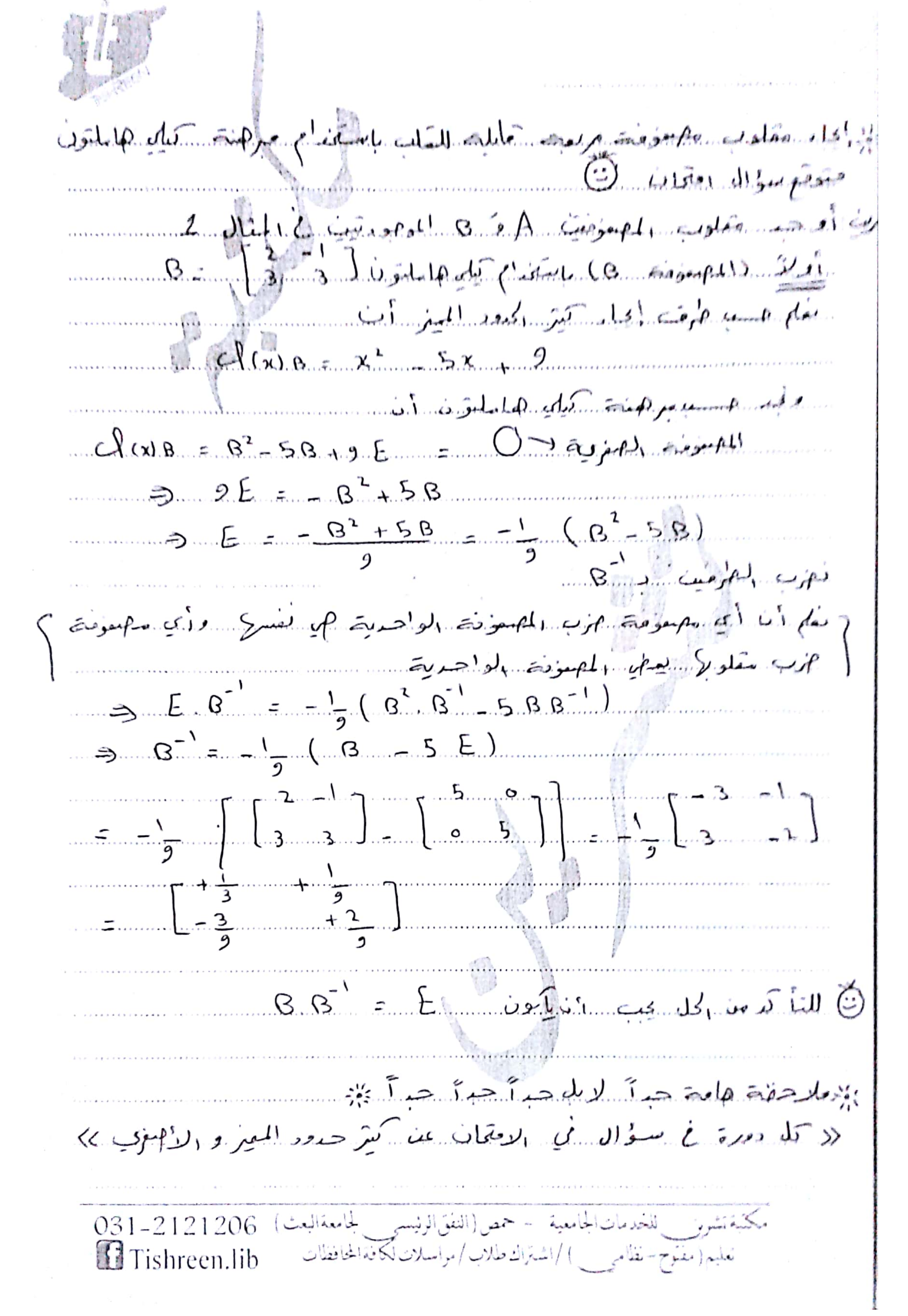
حسب الطريقة الأولى

حيث معامل x^2 هي 1 ومعامل x^{n-1} يساوي - أثر المصفوفة أي معامل x يساوي 4 والحد الثابت يساوي $(-1)^2 |A|$ ويساوي -1

$$\Rightarrow cl(x)\,A = x^2 - 4x - 1$$

حسب الطريقة الثانية

$$cl(x)\,A = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 1$$



*) إيجاد مقلوب مصفوفة مربعة قابلة للقلب باستخدام مبرهنة كيلي هاملتون
مهم سؤال امتحان ☺

مثال: أوجد مقلوب المصفوفتين A و B الموجودتين في المثال 1

الحل: (المصفوفة B) باستخدام كيلي هاملتون $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

نعلم من حسب طريقة إيجاد كثير الحدود المميز أن

$$Cl(x)_B = x^2 - 5x + 9$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون أن

$$Cl(x)_B = B^2 - 5B + 9E = O \rightarrow \text{المصفوفة الصفرية}$$

$$\Rightarrow 9E = -B^2 + 5B$$

$$\Rightarrow E = -\frac{B^2 + 5B}{9} = -\frac{1}{9}(B^2 - 5B)$$

نضرب الطرفين بـ B^{-1}

(نعلم أن أي مصفوفة نضرب المصفوفة الواحدية في نفسها وأي مصفوفة نضرب بمقلوبها يعطي المصفوفة الواحدية)

$$\Rightarrow E \cdot B^{-1} = -\frac{1}{9}(B^2 \cdot B^{-1} - 5BB^{-1})$$

$$\Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{9}(B - 5E)$$

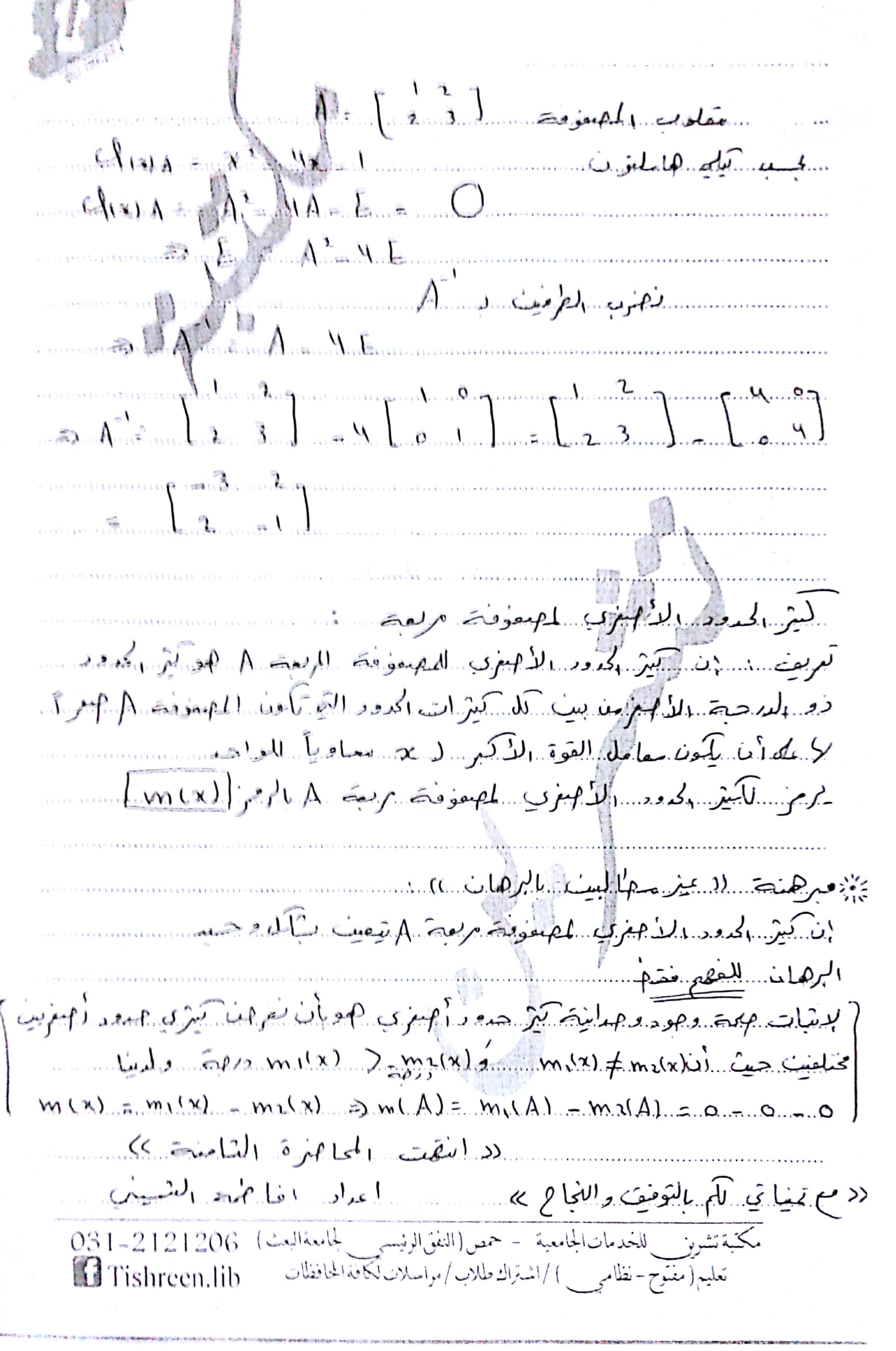
$$= -\frac{1}{9}\left[\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right] = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +\frac{1}{3} & +\frac{1}{9} \\ -\frac{3}{9} & +\frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

☺ للتأكد من الحل يجب أن يكون $B \cdot B^{-1} = E$

☼ ملاحظة هامة جداً لأبل جداً جداً جداً ☼

« كل دورة في سؤال في الامتحان عن كثير حدود المميز والأصغري »



مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

بحسب كيلي هاملتون

$C(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1$

$C(A) = A^2 - 4A - E = 0$

$\Rightarrow E = A^2 - 4A$

نضرب الطرفين بـ A^{-1}

$\Rightarrow A^{-1} = A - 4E$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

كثير الحدود الأصغري لمصفوفة مربعة :

تعريف : إن كثير الحدود الأصغري للمصفوفة المربعة A هو كثير الحدود ذو الدرجة الأصغر من بين كل كثيرات الحدود التي تأفن المصفوفة A علماً أن يكون معامل القوة الأكبر لـ x مساوياً للواحد

يرمز لكثير الحدود الأصغري لمصفوفة مربعة A بالرمز $m(x)$

مبرهنة ((غير مطلوب بالبرهان)) :

إن كثير الحدود الأصغري لمصفوفة مربعة A يتعين بشكل وحيد

البرهان للفهم فقط

[لإثبات صحة وجود ووحدانية كثير حدود أصغري هو بأن نفرض كثيري حدود أصغريين مختلفين حيث أن $m_1(x) \neq m_2(x)$ و $m_1(x)$ ، $m_2(x)$ لهما نفس الدرجة ولدينا

$m(x) = m_1(x) - m_2(x) \Rightarrow m(A) = m_1(A) - m_2(A) = 0 - 0 = 0$]

((انتهت المحاضرة الثامنة))

((مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح)) إعداد [illegible]